

Министерство образования и науки Республики Татарстан
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«Нижнекамский политехнический колледж имени Е.Н. Королёва»

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА УРОКА

по дисциплине «математика»

Тема «Применение определённого интеграла. Примеры применения интеграла в
физике и геометрии»

Автор: Смаков Ирек Хамитович
Преподаватель математики

Нижнекамск, 2022г.

АННОТАЦИЯ

Данная методическая разработка предназначена для проведения занятия по теме: «Применение определённого интеграла. Примеры применения интеграла в физике и геометрии» является комбинированным занятием и даёт представление о применение интеграла при вычислений площадей и объемов различных геометрических телах, физических задачах на общем уровне, включающее в себя интегральное исчисление, что соответствует строительной специальности.

Важность темы заключается в том, что современный мир строительных достижений разнообразен, что представление каких-либо строительных проектов без математики невозможно.

В основе занятия – демонстрация умений применять формул интегрирования в практических расчетах.

Повторение и актуализация знаний по предыдущему разделу тесно связаны с изучаемым материалом.

Методическая разработка включает описание методических приемов, позволяющих решить задачи, особенно актуальные при подготовке специалиста: проверить сформированность знаний, умений и навыков; развить внимательность и профессиональное мышление при проведении практических расчетов.

Для оценки сформированности профессиональных компетенций применяется фронтальная беседа, работа в малых группах.

Материал предлагаемого занятия можно брать за основу и в зависимости от конкретных условий дополнять и дорабатывать его.

Содержание

1. Пояснительная записка
 2. План урока
 3. Технологическая карта
 4. Ход урока
 - 4.1. Организационный момент. Цели и задачи
 - 4.2. Актуализация опорных знаний. Фронтальный опрос
 - 4.3. Изучение нового материала
 - 4.4. Закрепление изученного материала
 5. Заключительная часть. Подведение итогов
 6. Рефлексия
 7. Домашнее задание
- Источники информации и литература

Пояснительная записка

Данный урок проводится для студентов первого курса дневного отделения с целью углубления и закрепления знаний по теме «Применение определённого интеграла. Примеры применения интеграла в физике и геометрии».

Основной целью урока является ознакомить обучающихся с применением определенного интеграла в различных предметных областях.

В результате освоения курса алгебра и начала анализа обучающийся должен иметь представление:

- что такое определенный интеграл и методы их вычисления;
- вращение графиков функций вокруг оси и образование фигур.

Обучающийся должен уметь:

- **вычислять определенные интегралы элементарных функций;**
- **применять формулу Ньютона-Лейбница при вычислении физических и геометрических задач;**

Сформированы следующие компетенции:

- общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами;

ОК 05. Использовать информационно - коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;

ПЛАН УРОКА

Предмет: математика

Тема: Применение определённого интеграла. Примеры применения интеграла в физике и геометрии.

Тип урока: Изучение нового материала.

Вид: урок-конференция.

Продолжительность занятия: 80 минут.

Цель: познакомиться с применением определенного интеграла в различных предметных областях.

Задачи

Образовательные:

- рассмотреть задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, дать описание математической модели таких задач; рассмотреть два способа его вычисления:

- а) используя его геометрический смысл
- б) используя формулу Ньютона-Лейбница.

Развивающие:

- Способствовать развитию умений учащихся обобщать полученные знания, проводить анализ, синтез, сравнения, делать необходимые выводы.
- развивать навыки самостоятельной деятельности,
- активизировать мыслительную деятельность.

Воспитательные:

- воспитание познавательного интереса к учебному предмету;
- воспитание у учащихся культуры мышления;
- воспитывать чувство ответственности за качество и результат выполняемой работы;
- формировать ответственность за конечный результат.

Комплексно-методическое обеспечение: книга, карточки с заданиями, справочные материалы.

Наглядный материал: онлайн платформа МЭО,

- таблица интегралов;

- карточки с заданиям для самостоятельной работы

- оценочный лист учащегося

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА

№ этапа	Название этапа	Деятельность преподавателя	Деятельность студентов	Время (мин.)	Формирование общих компетенций
1	Организационный момент	Приветствие учащихся; проверка присутствующих; постановка целей и задач урока; объяснение условий проведения занятия	Дежурный сообщает об отсутствующих на уроке.	3	
2	Учебно-познавательная деятельность- актуализация опорных знаний	Проводит фронтальный опрос студентов. Изучение новой темы.	Отвечают на вопросы преподавателя; выполняют письменное задание; выполняют самопроверку.	40	ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам; ОК 05. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
3	Интеллектуально-преобразовательная деятельность 1.Систематизация обобщение знаний 2.Приобретение дополнительных знаний 3. Закрепление знаний - практическая работа	Преподаватель контролирует ход урока, комментирует при необходимости; проводит опрос с целью выяснения и уточнения принятого материала. Просмотр заданий по МЭО Комментарий, проводит инструктаж по выполнению практической работы. Проведение викторины PANQUIZ.	участвуют в беседе; комментируют, уточняют, задают вопросы; смотрят видеоролик; выполняют практическую работу в тетрадях; проводят самопроверку; отвечают на вопросы	30	ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами; ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;

4	Информация о домашнем задании	Объявляет домашнее задание, проводит инструктаж по его выполнению в МЭО	Слушают, записывают, задают вопросы	2	
5	Рефлексия учебной деятельности. Контроль и оценка результатов	Подводит итог занятия, объявляет оценки, проводит рефлексивный опрос	Отвечают на вопросы, подводят итоги	5	ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;

ХОД УРОКА

I. Организационный момент:

- приветствие
- проверка присутствующих учеников на уроке.

II. Постановка целей и задач урока:

Цель урока: познакомиться с применением определенного интеграла в различных предметных областях.

Задачи урока:

Решаем геометрические задачи с помощью определённого интеграла.

1. Вычисляем объём тела многогранников с помощью интеграла.
 2. Вычисление объемов фигур вращения помощью определенного интеграла.
- Решаем физические и геометрические задачи с помощью определённого интеграла**
3. Вычислите объём тела с помощью определенного интеграла, если известно площадь сечения.
 4. Вычисление массы стержня.
 5. Вычисление работы силы.

Деятельность преподавателя: объяснение материала с применением платформы МЭО, работа с раздаточным материалами; обобщение.

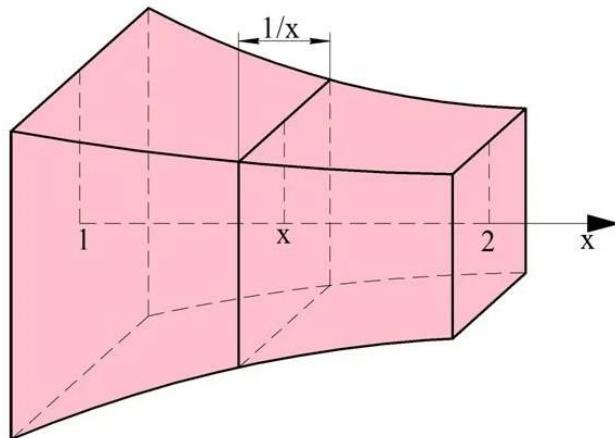
Фронтальная устная работа: контрольные вопросы.

1. Что называется интегрированием функций? (это восстановление функции по её производной или обратное действие по отношению к дифференцированию).
2. Написать формулу Ньютона-Лейбница и пояснить его геометрический смысл.
3. Привести примеры нахождения определенного интеграла.

III. Изучение нового материала:

Решаем геометрические задачи с помощью определённого интеграла.

1. Вычисляем объём тела многогранников с помощью интеграла.



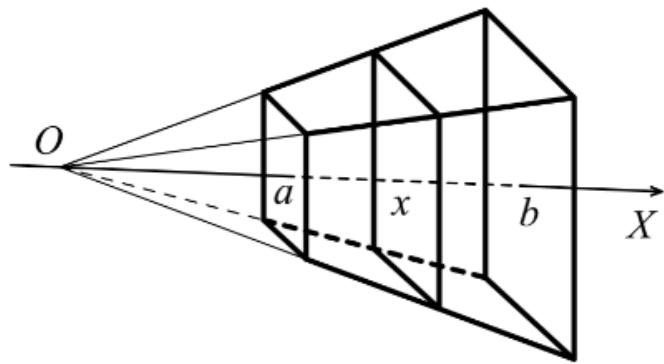
Пример. Фигура расположена в пространстве между двумя плоскостями, перпендикулярными оси Ox , причем координаты этих сечений равны 1 и 2. Каждое сечение фигуры с координатой x является квадратом, причем его сторона равна величине $\frac{1}{x}$. Найдите объем тела.

Решение. В данной задаче ось Ox уже проведена. Известны и числа a и b -это 1 и 2, ведь именно плоскости, проходящие через точки $x=1$ и $x=2$, ограничивают исследуемое тело. Теперь найдем площадь произвольного сечения с координатой x . Так как оно является квадратом со стороной $\frac{1}{x}$, то его площадь будет квадратом этой стороны.

Основная формула:
$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

$$S(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \text{ тогда } V = \int_1^2 x^{-2} dx = -x^{-1} \Big|_1^2 = (-2^{-1}) - (-1^{-1}) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ (куб.ед.)}$$

Задача: Выведите формулу объёма усеченной пирамиды.



Пусть точка O — вершина полной пирамиды. Проведём через вершину пирамиды точку O ось Ox перпендикулярно основанию пирамиды. Основания усечённой пирамиды пересекают ось Ox в точках a и b (см. рисунок). Каждая плоскость, перпендикулярная оси Ox и пересекающая отрезок $[a;b]$ в точке x , образует в сечений многоугольник, подобный многоугольнику — основанию пирамиды. Поэтому площадь сечения $S(x)$ равна kx^2 .

В частности $s = S(a) = k \cdot a^2$; $S = S(b) = k \cdot b^2$. Объём усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

$$V = \int_a^b kx^2 dx = \frac{kx^3}{3} \Big|_a^b = \frac{k}{3} (b^3 - a^3) = \frac{b-a}{3} (kb^2 - kab + ka^2) = \frac{H}{3} (S + \sqrt{Ss} + s) .$$

Ответ: $V = \frac{H}{3} (S + \sqrt{Ss} + s)$

Задание и МЭО №1 (выполняет обучающейся)

Вычислите объём тела, ограниченного плоскостями $x = 3$, $x = 6$, площадь сечения которого плоскостью, параллельной плоскости yOz и отстоящей от неё на расстоянии x , меняется по закону: $S(x) = x^2 + 2$. Впишите ответ.

$V =$ 69

Решение: $V = \int_a^b S(x)dx$

решаем по формуле Ньютона-Лейбница $V = \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$$V = \int_3^6 (x^2 + 2)dx = \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_3^6 = \left(\frac{6^3}{3} + 2 \cdot 6 \right) - \left(\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3 \right) = (72 + 12) - (9 + 6) = 69 \text{ (куб. ед.)}$$

Задание с открытым ответом.

Вычислите объём тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $x=0,5$ площадь сечения которого плоскостью, параллельной плоскости yOz и отстоящей от неё на расстоянии x , меняется по закону:

$$S(x) = e^{2x} + 2x.$$

Решение: $V = \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, решаем по формуле Ньютона-Лейбница

$$V = \int_0^{0.5} (e^{2x} + 2x)dx = \frac{e^{2x}}{2} + x^2 \Big|_0^{0.5} = \left(\frac{e^{0.5 \cdot 2}}{2} + 0.5^2 \right) = \frac{e}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot e + 1}{4} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{4} = 1\frac{3}{4}$$
 (куб.ед)

Так как $e \approx 2,71$ (const постоянное число), округлили его до десятых $e \approx 3$

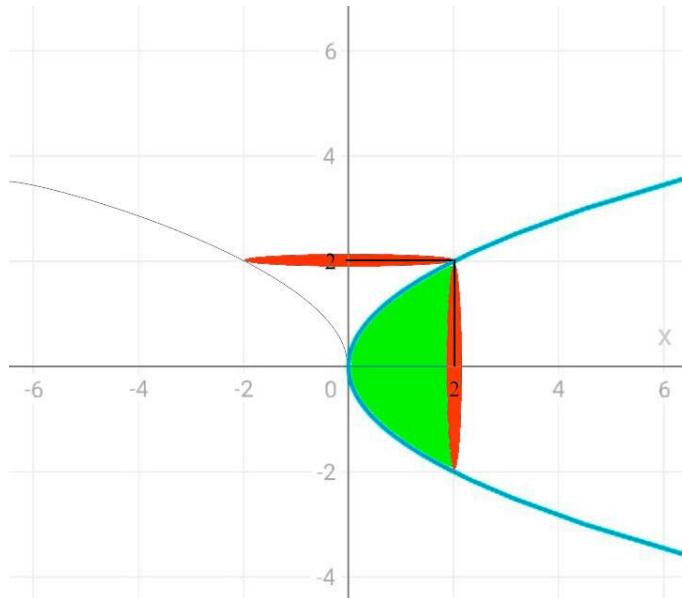
2. Вычисление объемов фигур вращения помощью определенного интеграла.

Объем фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеций, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$ прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (1)$$

Объем фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеций, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$ прямыми $y=c$ и $y=d$, вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy. \quad (2)$$



Пример. Вычислить объем фигуры, образованных вращением площадей, ограниченных указанными линиями: $y^2 = 2x$ (парабола), $y=0$, $x=2$.

$$V_x = \pi \int_0^2 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^2 = 4\pi \text{ (куб.ед.)}$$

Для того, чтобы вычислить объем фигуры вращения вокруг оси Оу, нужно выразить x через y и подставить формулу (2).

$$y^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}, \quad V_y = \pi \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 dx = \pi \frac{y^5}{4 \cdot 5} \Big|_0^2 = \frac{16}{10} \pi \text{ (куб.ед.)}$$

Величины	Соотношение в дифференциалах	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа F – сила N – мощность	$dA = F(x)dx$ $dA = N(t)dt$	$F(x) = \frac{dA}{dx}$ $N(t) = \frac{dA}{dt}$	$A = \int_x^y F(x)dx$ $A = \int_t^y N(t)dt$
m – масса тонкого стержня ρ – линейная плотность	$dm = \rho(x)dx$	$\rho(x) = \frac{dm}{dx}$	$m = \int_x^y \rho(x)dx$
q – электрический заряд I – сила тока	$dq = I(t)dt$	$I(t) = \frac{dq}{dt}$	$q = \int_t^y I(t)dt$
s – перемещение v – скорость	$ds = V(t)dt$	$V(t) = \frac{ds}{dt}$	$s = \int_t^y V(t)dt$
Q – количество теплоты c – теплоемкость	$dQ = c(t)dt$	$c(t) = \frac{dQ}{dt}$	$Q = \int_t^y c(t)dt$

IV. Закрепление нового материала.

Тренировочные задания из МЭО №1

Геометрические величины	Формулы
Объём тела, получаемого вращением параболы $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ вокруг оси x .	$\int_0^1 x^2 dx$
Площадь подграфика функции $y = x^4$, $x \in [0, 1]$.	$\pi \int_0^1 x^2 dx$
Объём тела, площадь переменного сечения которого плоскостью, перпендикулярной оси x , меняется по закону $S = x^2$, $x \in [0, 1]$.	$\int_0^1 x^4 dx$
Объём прямого кругового конуса высоты 1 и радиусом основания 1.	$\pi \int_0^1 x^4 dx$

Тренировочные задания из МЭО №2

Физическая величина	Интеграл для её выражения
$A =$	$\int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
$s =$	$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
$v =$	$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$
$q =$	$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
$m =$	$\int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$

Задание №2 с открытым ответом (выполняет учащийся).

Вычислите массу стержня от $x_1=1$ до $x_2=2$, если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = 4x^2 + 5x + 2$.

Решение:

Массу тела через интеграл вычисляем по формуле:

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

$$m = \int_1^2 (4x^3 + 5x + 2) dx = x^4 + \frac{5x^2}{2} + 2x \Big|_1^2 = 24 \frac{1}{2} .$$

Решаем задачи МЭО. Задание №3 (выполняет учащийся)

Вычислите работу за промежуток времени [4;9], если мощность вычисляется по формуле $N(t) = 6\sqrt{t} + t^2$.

Решение:

Работа через интеграл вычисляем по формуле:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt \text{ (работа вычисляется по времени)}$$
$$A = \int_{4}^{9} (6\sqrt{t} + t^2) dt = 4 \cdot t^{\frac{3}{2}} + \frac{t^3}{3} \Big|_4^9 = 4\sqrt{t^3} + \frac{t^3}{3} \Big|_4^9 = 297 \frac{2}{3}$$

V. Подведение итогов.

Проанализируйте свою деятельность и результаты изучения темы «Применение определённого интеграла. Примеры применения интеграла в физике и геометрии». Для этого закончите данные ниже предложения.

1. Самым интересным при изучении темы было ...
2. Лучше всего мне удалось ...
3. Сложнее всего было ...
4. Для себя я понял(а) ...

Выставление оценок.

VI. Домашнее задание. Матрица назначений заданий №6, №17

ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мордкович А.Г.Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.-М., 2020г.
2. Математика: учебник для среднего профессионального образования / Н.В. Богомолов, П.И.Самойленко.- 5-е изд.,перераб.
3. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. Учреждений / А.Н. Колмогоров, М., 2018г.

Интернет-ресурсы:

1. Цифровая платформа мобильное электронное образование <https://educont.ru/>
2. Российская электронная школа <https://resh.edu.ru/>
3. Проведение игровых тестовых заданий, викторин
<https://app.panquiz.com/login.html?returnUrl=%2Fquizzes%2Flist.html>